Τεχνικές Μαθηματικής Μοντελοποίησης

Χωρίκης
Γραφείο 313Ε
horikis @ uoi.gr.

Η έννοια της κλίμακας:

Θεωρούμε την εξίσωση : $m\ddot{x} + \underset{\text{τριβή}}{\gamma}\dot{x} + \overset{\text{ελατήριο}}{k}x = F_0\cos(\omega t).$

η οποία αντιστοιχεί σε ταλάντωση με υστέρηση

Αν $\gamma=0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = F_0\cos(\omega t)$

Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ:

$x = x_0 + x_1$. η πλήρης λύση.

όπου η $m\ddot{x}_0 + kx_0 = 0$ και x_1 : οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης.

$$m\ddot{x}_0 + kx_0 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_0 + \frac{k}{m}x_0 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0.$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $x_0 = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$ η λύση της ομογενούς.

Θέλω να βρω μια μερική λύση της μη ομογενούς.

υποθέτω $x_1 = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = -\omega^2\alpha m\cos(\omega t) - \beta\omega^2 m\sin(\omega t) + k\alpha\cos(\omega t) + k\beta\sin(\omega t)$$
$$= F_0\cos(\omega t).$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \alpha(k-\omega^2 m) = F_0 \\ \beta(k-\omega^2 m) = 0. \end{cases}\right\} \quad \beta = 0, \quad \alpha = \frac{-F_0}{m\omega^2 - k}.$$

Η συνολική λύση της εξίσωσης :

$$x_1 = -\frac{F_0}{m\omega^2 - k} \cdot \cos(\omega t)$$

και άρα το $X = B\cos(\omega_0 t) + A\sin(\omega_0 t) - \frac{F_0}{m\omega^2-k}\cos(\omega t).$

Ορίζω <u>αρχικές συνθήκες</u> :

$x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Άρα $x(0)=0 \Rightarrow B = \frac{F_0}{m\omega^2-k}.$

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A = 0.$

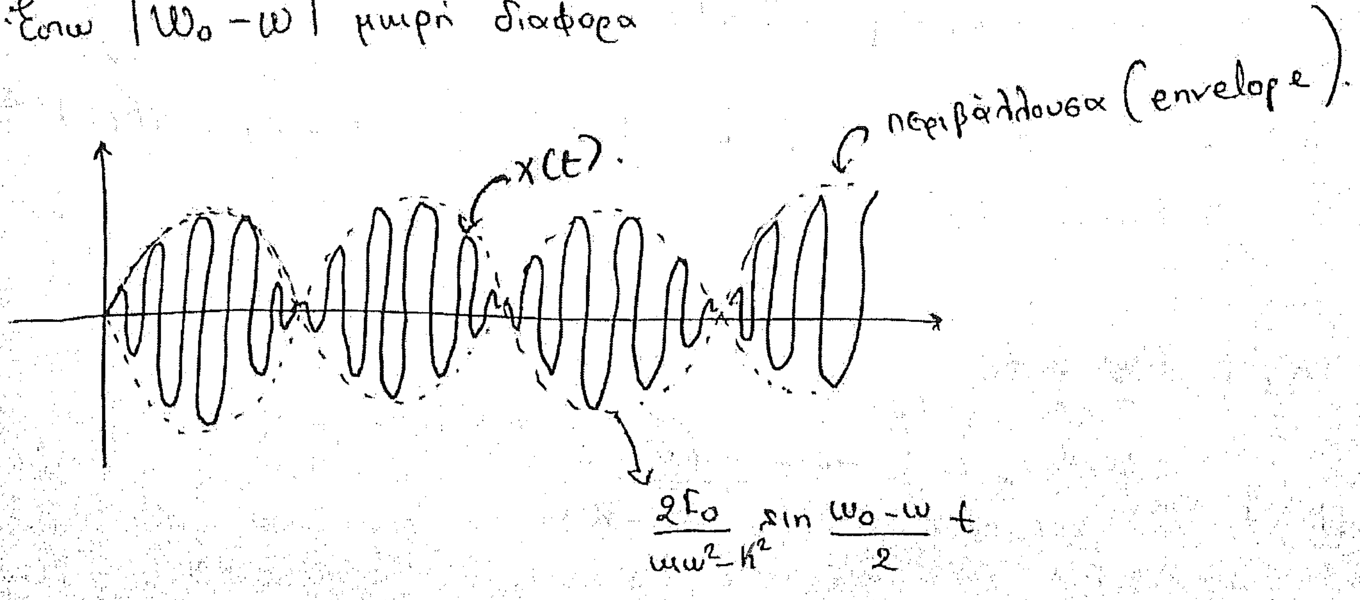
$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2 - k^2}\Big[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\Big]$$

*

Τριγωνομ. ταυτότητα:

$$x(t) = \left[\frac{2F_0}{m\omega^2-k}\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\right]\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right).$$

Έστω $|\omega_0 - \omega|$ μικρή διαφορά



Η περίπτωση $m\omega^2 - k = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} = \omega_0^2$.

ή $\omega = \omega_0$.

Τότε η $x_1 \neq \alpha\cos(\omega_0 t) + \beta\sin(\omega_0 t)$.

Αναζητώ λύσεις της μορφής

$x_1 = \alpha t\cos(\omega t) + \beta t\sin(\omega t)$

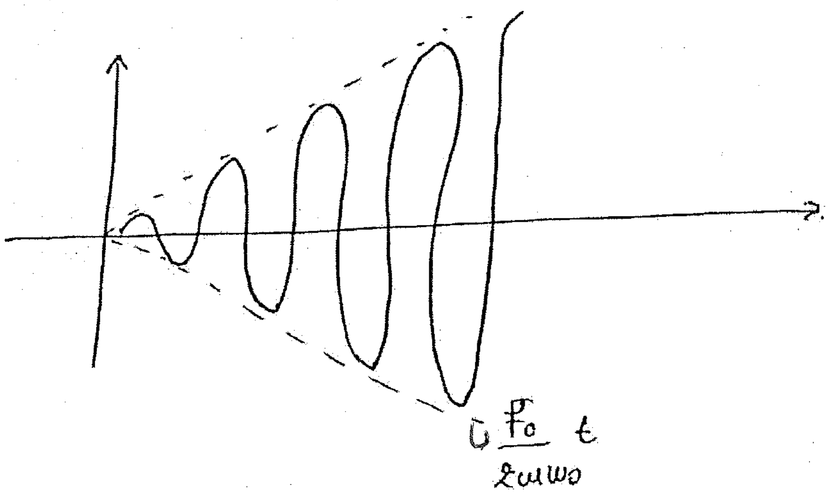
περιβάλλουσα

$\Rightarrow \omega = \omega_0$

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) + \left[\frac{F_0}{2m\omega_0} t\right]\sin(\omega_0 t)$$

Για $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

περίπτωση συντονισμού.



(Δακρύα 10gr (~ 1 κου/λιού)

Όγκος Μεσογείου $4\cdot10^6 km^3$ (πυκνότητα νερού $\rho \simeq 10^3$)

$= 4\cdot10^{21} gr$.)

Ποσοστό: $\frac{10}{4\cdot10^{21}} = \simeq 2.5\cdot10^{-21}$.

Σε ένα ποτήρι νερό: $\frac{1}{3}$ lt. = 330 gr.

τα $\frac{330 \text{ gr}}{\underbrace{18}_{\text{ατομ. βάρη νερού}}} \cdot N_{Avogadro} \times 2.5\cdot10^{-21} \simeq 30.000$ μόρια των δακρύων της Κλεοπάτρας

Εργαλεία:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{m!\,(n-m)!}}_{\binom{n}{m}} a^{n-m} \cdot b^{m}$$, n: ακέραιος.

διωνυμικό ανάπτυγμα.

Ανάπτυγμα Taylor:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

ή $x_0 = 0$ $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

π.χ.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

SOS

π.χ. Να βρεθεί η τιμή του e με ακρίβεια 10^{-2}.

N $$e^x = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}$$

$$R_{N+1} = \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$$ το λάθος είναι ο επόμενος όρος.

άρα $R_{N+1} < 10^{-2}$.

Άρα $$e = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \cancel{x}^{n} + R_{N+1}.$$

$$R_{N+1} \approx \frac{1}{(N+1)!} < 10^{-2}.$$

$\Rightarrow (N+1)! > 10^2$ Άρα για $\boxed{N=4}$ ο πρώτος ακέραιος

$$\Rightarrow e = \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!} + O(10^{-2}).$$

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}$$

ΑΣΚΗΣΗ: Να υπολογ. το π:

Γνωρίζω $\underset{\text{arctant}}{\tan^{-1}} \cancel{t} = \int_0^{t} \frac{dx}{1+x^2}$ SOS

$$t=1 \Rightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \boxed{\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.}$$

$\frac{1}{1+x^2}$ που είναι γεωμετρ. σειρά: $\frac{1}{1+x^2} =$

Να βρεθεί το π με ακρ. 10^{-2}.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \Longrightarrow e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Mathematica : f[x_] = Exp[x]

f[...] // N (τιμή)

Εντολή Series[f[x], {x,0,10}] { Σειρά Taylor της f(x) γύρω από το 0 με 10 όρους }

ΣΟΣ

- $\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$
- $\tan^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Για x=1: $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$f = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n$$

$$\Longrightarrow \pi = 4\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\,dx = 4\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}\,dx$$

$$= 4\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1$$

Θέλω να το υπολογίσω με ακρίβεια 10^{-2}.

δλδ $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1}\right| < 10^{-2} \Longrightarrow \frac{1}{2n+3} < 10^{-2}$

δλδ $2n+3 > 100 \Longrightarrow n > \frac{97}{2}$

άρα $n = 49$ για να υπολογίσω με ακρ. 2α δεκαδικά.

$\Rightarrow \theta\pi \approx 4\sum_{n=0}^{49} (-1)^n \frac{1}{2n+1} + O(10^{-2})$

Αλγεβρικές Εξισώσεις

Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2-(3+2\varepsilon)x+(2+\varepsilon)=0 \qquad \text{Το } \varepsilon<<1.$$

$$\Delta = 9+4\varepsilon^2+12\varepsilon-8-4\varepsilon = 4\varepsilon^2+8\varepsilon+1.$$

Άρα $x_1 = \dfrac{3+2\varepsilon+\sqrt{4\varepsilon^2+8\varepsilon+1}}{2}$ $\quad x_2 = \dfrac{3+2\varepsilon-\sqrt{4\varepsilon^2+8\varepsilon+1}}{2}$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

Θεωρούμε μια εξίσωση (αλγεβρ/διαφορική) η οποία περιέχει μια μικρή παράμετρο. Αν θέσουμε την παράμετρο ($\varepsilon=0$) προκύπτει μια εξίσωση της οποίας ξέρουμε τη λύση. Η εξίσωση αυτή λέγεται το αδιατάραχτο πρόβλημα. (και δεν περιέχει το ε)

Γράφουμε την λύση της εξίσωσης σε μορφή σειράς.

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n x_n = x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\dots$$

Αντικαθιστώ στην εξίσωση και συλλέγουμε δυνάμεις του ε.

Η εξίσωση του ε^0 πρέπει να είναι το αδιατάραχο πρόβλημα.

Η εξίσωση για το x_1 προκύπτει από τη συλλεξη του ε^1

x_2 ——— // ——— ε^2

$\vdots$ $\quad\vdots$

x_n ——— // ——— ε^n

Κάθε επόμενη εξίσωση περιέχει όρους προηγούμενων τάξεων (δλδ η εξίσωση του x_1 περιέχει μόνο το x_0, η εξίσωση του x_2 περιέχει μόνο το x_1 και το x_0 κ.ο.κ).

x_3 περιέχει (x_0, x_1, x_2)

π.χ Solve [$x_0^2 - 3x_0 + 2 == 0,\ x_0$]

Βρίσκω τα $x_0 < \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$, λύνω την εξίσωση για $\varepsilon^2=0$ και αντικαθιστώ τα x_0 $\left(x_1 = \dfrac{-1+2x_0}{-3+2x_0} \right)$ κ.ο.κ.

• Προσέχουμε να έχουμε τόσες λύσεις όσες προβλέπονται από το πρόβλημα.

π.χ Να βρω: $x^3 - (6+\varepsilon)x^2 + (11+2\varepsilon)x - (6+\varepsilon^2) = 0$.

Θέλω $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2$

Ποια θα είναι τα x_0, x_1, x_2?

(αρχ. Mathematica).

3/3/2015

$$(x-1)^2 = -\varepsilon x \implies (x-1)^2 + \varepsilon x = 0.$$

α) Μέθοδο διαταραχών

β) Πλήρης λύση.

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3$$

$$Eq = (x-1)^2 + \varepsilon x$$

Collect [Eq, ε]

(Το αδιατάρακτο πρόβλημα: $1 + 2x_0 + x_0^2 = 0 \implies x_0 = 1$ δηλαδή).

Solve [$x_0 - 2x_1 + 2x_0 x_1 == 0,\ x_1$]

$$\implies x_1 \longrightarrow \left\{ \frac{-x_0}{2(x_0-1} \right\}$$

κ.ο.κ.

Πλήρης λύση: Solve[$(x-1)^{\wedge 2} + \varepsilon x$ ==0, x]

$$\Rightarrow \left\{ x \to \frac{1}{2}\left(\underbrace{2-\sqrt{-4+e}\,\sqrt{e}-e}_{①} \right), \; x \to \frac{1}{2}\left(\underbrace{2+\sqrt{-4+e}\,\sqrt{e}-e}_{②} \right) \right\}$$

Εκφράζω τις λύσεις σε σειρά:

Series[① , {e,0,5}] , Series[② , {e,0,5}]

$$(x-1)(x-\tau) + \varepsilon x = 0$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{1-t}$$

$$x_0 = t \Rightarrow x_1 = \frac{-t}{-1+t}$$

$$x_2 \longrightarrow \frac{-x_1 - x_1^2}{-1+t}$$

$$\left(x_0 = 1, \; x_1 = \frac{-1}{1-t}, \; x_2 = \frac{-t}{(-1+t)^3} \right)$$

$$\left(x_0 = t, \; x_1 = \frac{t}{1-t}, \; x_2 = \frac{t-2t^2}{(-1+t)^3} \right)$$

// Απλοποίηση Simplify[..]

- $x = x_0 + \underbrace{\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2} + \varepsilon^3 x_3$

Θέλω

$$\varepsilon x_1 = \varepsilon^2 x_2$$

$$x_1 = \varepsilon x_2$$

$$\Rightarrow \frac{\tau}{1-\tau} = \frac{\varepsilon \tau}{(1-\tau)^3} \Rightarrow (1-\tau)^2 = \varepsilon \Rightarrow 1-\tau = \sqrt{\varepsilon}$$

↙ Ξεχνάω μια τάξη δηλ.

Όσο πιο κοντά το t στο 1 τόσο πιο σημαντική η τάξη που ξεχνώ.

Αν διαλέξω $x_0 = \varepsilon x_1$ δηλ δύο πρώτους όρους

$$\tau = \varepsilon \frac{\tau}{1-\tau} \Rightarrow 1-\tau = \varepsilon .$$

Δεν μου δίνει πληροφορία που δεν έχω ήδη:
Αν λοιπόν επιλέξω τους επόμενους δύο όρους έχω παραπάνω πληροφορία.

π.χ $(x-1)^2 + \varepsilon x = 0$

$$x = x_0 + \sqrt{\varepsilon}\, x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^{3/2} x_3$$

Collect [Eq1, ε]

$\{x_0 \to 1,\ x_0 \to 1\}$ δηλαδή.

$x_1 = 0$

$$x_2 = \frac{-x_0 - x_1^2}{2(x_0-1)}$$

Solve $[x_0 + x_1^2 - 2x_2 + 2x_0 x_2 == 0,\ x_1]$

$$\Rightarrow \left\{ x_1 \to -\sqrt{-x_0+2x_2-2x_0x_2},\ x_1 \to \sqrt{-x_0+2x_2-2x_0x_2} \right\}$$

- $\varepsilon x^2 + x + 1 = 0$

Για $\varepsilon = 0 \Rightarrow x = -1$ (μια λύση μοναδική)

Solve $[\varepsilon x^2 + x + 1 == 0,\ x]$ πλήρης

$$\left\{ x \to \frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon},\ x \to \frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} \right\}$$

$\downarrow \qquad \swarrow$

Series [..., {e, 0, 5}]

Το αποτέλεσμα: $\boxed{\frac{-1}{\varepsilon}} + 1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 + 14\varepsilon^4 + 42\varepsilon^5 + O[e]^6$

πρόβλημα.

Θα υποθέσω πως μια από τις δύο ρίζες είναι της μορφής:

SOS $\boxed{x = \frac{y}{\varepsilon^n}} + x_0 + \varepsilon x_1 + \dots$

κάνοντας τα γνωστά $\Longrightarrow$ Οι μόνοι όροι με y, e χωρίς x είναι:

$$\varepsilon^{1-2n} \cdot y^2 + \varepsilon^{-n} y = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 1 - 2n = -n \quad \Longrightarrow \quad n = 1$$

$$y^2 + y = 0 \quad \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1. \end{cases}$$

Άρα: $x = \frac{-1}{\varepsilon} + x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$

- Όταν το πρόβλημα έχει: (αδιατάρακτο πρόβλημα)

α) διπλή λύση: λάθη ενδιάμεση δυναμη/τάξη. Από x_1, x_2 βρίσκω την ενδιάμεση δυναμη

β) ακριβώς μια λύση: $\frac{y}{\varepsilon^n}$ αντικαθ. Λύνω δια το n, y.

Η μια θα βρίσκεται κανονικά. $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$

η άλλη $x = \frac{y}{\varepsilon^n} + x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$

SS

- $i = e^{i\pi/2}$ $\Longrightarrow$ $i^i = \left(e^{i\pi/2}\right)^i = e^{-\pi/2}.$

διότι $x + iy = re^{i\theta}$

$x^2 + y^2 = r^2$

$\frac{y}{x} = \tan\theta$

i^i

π.χ. $\varepsilon x^3 + x + 2 + \varepsilon = 0.$ Sol) $x = \frac{y}{\varepsilon^n}$

Με τον ίδιο τρόπο: $y\varepsilon^{-n} + y^3 e^{1-3n} = 0$

$-n = 1-3n \Rightarrow 2n = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{2}$

$y^3 + y = 0 \Rightarrow y = \pm i$

Άρα: • $x = \frac{i}{\varepsilon^{1/2}} + x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots$

$2 - 2x_0 = 0 \Rightarrow \underline{x_0 = 1} \Longrightarrow x_1 \rightarrow \frac{3i\, x_0^2}{2} = \frac{3i}{2}$,

$x_2 \longrightarrow 1 - 3ix_1 = -\frac{7}{2}$

• Για την $x = \frac{-i}{\sqrt{\varepsilon}} + x_0 + \varepsilon^{n(1/2)} \cdot x_1 + e x_2$

$x_0 = 1,\ x_1 = -\frac{3i}{2},\ x_2 \rightarrow 1 - 3ix_1 = -\frac{7}{2}$

• Για την $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2$

$\Rightarrow (-2, 7, -84)$

Άσκηση: $x^3 - (4+\varepsilon)x^2 + (5+2\varepsilon)x - 2 + \varepsilon^2 = 0.$

Για την $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2$

Ολοκληρώματα

Μας ενδιαφέρει η μελέτη ολοκληρ. που δεν μπορούν να εκφραστούν αναλυτικά μέσω στοιχ. συναρτήσεων.

Γιατί ολοκληρώματα;

Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε τη λύση του προβλήματος αρχ. τιμών.

$$\begin{cases} y' + y = \frac{1}{x} \\ y(1) = a \end{cases}$$

(Το 0 είναι ιδιόμορφο σημείο $\Longrightarrow$ πρόβλημα φαινομενικό)

Το λύνω με ολοκληρωτικό παράγοντα: e^x

δλδ: $$y' e^x + e^x y = \frac{e^x}{x}$$

$$(ye^x)' = \frac{e^x}{x}$$

Άρα: $$ye^x = \int \frac{e^x}{x} dx + c \Longrightarrow y = e^{-x} \int \frac{e^x}{x} dx + c e^{-x}.$$

[illegible] $c = ae$

Εφαρμόζω αρχική συνθήκη: $\Longrightarrow$ $$\boxed{y = \int_1^x \frac{e^{(t-x)}}{t} dt + a e^{1-x}}$$

Γενικά το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x}{x} dx$ δεν υπολογίζεται βάση στοιχειωδών συναρτήσεων και ορίζει μια γενικευμένη συνάρτηση που την λέμε:

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Ο σκοπός είναι να μελετήσουμε αυτά τα ολοκληρώματα σε κάποιες ειδικές περιοχές των παραμέτρων.

1η περίπτωση : Χρήση δυναμοσειρών.

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I(\varepsilon)=\int_0^1 \sin(\varepsilon x^2)\,dx$

Γενικά γνωρίζουμε ότι ολοκληρώματα (αόριστα) της μορφής $\int \sin(x^2)dx$ δεν υπολογίζονται.

Γνωρίζω όμως από τον ορισμό της συνάρτησης $\sin x$ ότι το ημίτονο:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\tan^{-1}x$$

Μπορώ να ορίσω συναρτήσεις με βάση ολοκληρώματα.

άρα και το:

$$\sin(\varepsilon x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\varepsilon x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Δηλαδή: $$\sin(\varepsilon x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\varepsilon^{2n+1}\cdot x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

Άρα το $$I(\varepsilon)=\int_0^1 \sin(\varepsilon x^2)\,dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\varepsilon^{2n+1}\cdot x^{4n+2}}{(2n+1)!}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{4n+2}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{4n+3}=I(\varepsilon)$$ // Ισχυρό αποτέλεσμα.

Ερώτηση : Ποτέ συγκλίνει η σειρά ?

Εξετάζω την απόλυτη σύγκλιση της με $a_n=(-1)^n \dfrac{\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\dfrac{1}{4n+3}$

Επειδή η σειρά είναι εναλλασσόμενη.

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{\varepsilon^{2n+3}}{(2n+3)!\,(4n+7)}}{\dfrac{\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)!\,(4n+3)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\cdot\frac{4n+3}{4n+7}\cdot\varepsilon^2$$

Ξέρω: $(2n+3)! = (2n+1)!(2n+2)(2n+3)$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{(2n+1)!}}{\cancel{(2n+1)!}\,(2n+2)\,(2n+3)}\cdot\frac{4n+3}{4n+7}\cdot\varepsilon^2 = 0 < 1$$

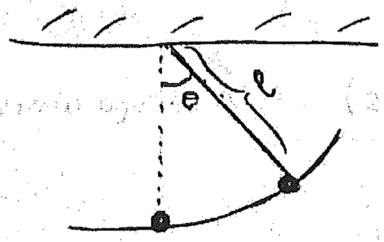
$\Longrightarrow$ Άρα η σειρά συγκλίνει $\forall\,\varepsilon$.

- $I(\varepsilon) = \dfrac{1}{3}\,\varepsilon - \dfrac{1}{42}\,\varepsilon^3 + \dfrac{1}{1320}\,\varepsilon^5 + o(\varepsilon^7)$

Αν λοιπόν $0<\varepsilon<<1$

Όσο το ε είναι μικρό η σειρά προσεγγίζεται πολύ καλά με το ε^3.

Το απλό εκκρεμές SOS



Η εξίσωση κίνησης:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{\ell}\cdot\sin\theta = 0 \\ \theta(0)=\theta_0 \quad , \quad \dot{\theta}(0)=0 \end{cases}$$

Ξεκινάμε από τη διαφορική $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$

$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$

$$\Longrightarrow \int \underbrace{\dot{\theta}\,\ddot{\theta}\,dt}_{\dot{\theta}\,d\dot{\theta}} + \omega^2 \int \underbrace{\sin\theta\,\dot{\theta}\,dt}_{\sin\theta\,d\theta} = 0$$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(\dot{\theta})^2 - \omega^2\cos\theta = c$ όμως $\dot{\theta}(0) = 0$

$\theta(0) = \theta_0$

Άρα μπορώ να βρω c : $\Longrightarrow c = -\omega^2\cos\theta_0$

<u>Συνολικά</u>: $(\dot{\theta})^2 = 2\omega^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$

προφανώς $\cos\theta - \cos\theta_0 > 0$ (διαφορετικά δεν έχω κίνηση)

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2\omega^2\underbrace{(\cos\theta - \cos\theta_0)}_{2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)}}$$

* Τριγωνομετρία

$$= 2\omega\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} = 2\omega \cdot dt \Longrightarrow \text{Ολοκληρώνω}$$

και βρίσκω: $T = 2\omega \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$

Παρατήρηση! Η περίοδος δεν είναι αρμονικής κίνησης. Το εκκρεμές δεν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (T=σταθερό)

όμως για μικρές εκτροπές γύρω από την θέση ισορροπίας το

$\sin\theta \simeq \theta$ διότι $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

Άρα το αρχικό πρόβλημα γράφεται:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

// Με χρήση χαρακτηρ. πολυωνύμου 2ου βαθμού.

Η λύση $\theta(t) = A\sin(\omega t) + B(\cos(\omega t))$

Η $\dot{\theta}(t) = \omega(A\cos(\omega t) - B(\sin(\omega t)))$

$$\left.\begin{array}{l} \theta(0) = B \\ \dot{\theta}(0) = A\omega \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B = \theta_0 \\ A = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\theta(T) = \theta_0 \cos(\omega t)}$$ Δηλαδή περιοδική κίνηση

περίοδος ω

Πιο γενικά: $I(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa\sin^2\theta}}$ $\kappa \ll 1$

Χρησιμοποιώ το Διωνυμικό ανάπτυγμα:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\kappa\sin^2\theta}} = (1-\kappa\sin^2\theta)^{-1/2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\kappa\sin^2\theta + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-\kappa\sin^2\theta)^2 + \dots$$

Αντικαθιστώ στο ολοκλήρωμα:

$$I(u) = \int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2} u \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, d\theta + \frac{3}{8} u^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \, d\theta$$

Τελικά: $I(u) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{4}u + \frac{9}{64}u^2 + \frac{25}{256}u^3 + \dots\right]$

Άρα αν κρατήσω τον πρώτο όρο η περίοδος είναι ανεξάρτητη από την αρχική συνθήκη. Για μικρές εκτροπές του εκκρεμούς δηλαδή.

Παράδειγμα: $I(x) = \int_0^x t^{-3/4} \cdot e^{-t} \, dt$

Ορισμός εκθετικού είναι: $e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{n!}$

$$I(x) = \int_0^x t^{-3/4} e^{-t} dt = \int_0^x t^{-3/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{n!} \, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{n-3/4} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{n+1/4}}{n+1/4}$$

Πότε συγκλίνει η σειρά;

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+1+1/4}}{(n+1)!\,(n+1+1/4)}}{\dfrac{x^{n+1/4}}{n!\,(n+\frac{1}{4})}} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1/4)}{(n+5/4)} |x| \Rightarrow \lim \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1/4}{n+5/4} |x| = 0 < 1$$

$\Longrightarrow$ Άρα η σειρά συγκλίνει $\forall\, x \in \mathbb{R}$ και μπορώ να την γράψω:

$$I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, x^{n+1/4}}{n!\,(n+1/4)} = 4x^{1/4} - \frac{4}{5} x^{5/4} + \frac{2}{9} x^{9/4} + \dots$$

Όσο μεγαλώνουν τα x ξεχνώ όρους που είναι πολύ σημαντικοί

$\Longrightarrow$ Η προσέγγιση αυτή είναι κακή.

Άρα η έννοια της σειράς και η εκτίμηση μέσω σειρών έχει έννοια για μικρές τιμές των παραμέτρων (<1).

Παράδειγμα: $I(x) = \int_x^{\infty} e^{-t^2}\, dt \qquad x \geq 0.$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt}_{\text{σταθερά}} - \underbrace{\int_0^{x} e^{-t^2}\, dt}_{\text{με απασχολεί πλέον η περιοχή } (0,x)} \qquad (\text{αλλαγή ορίων})$$

Για μικρές τιμές του x μπορώ να χρησιμοποιήσω τη μέθοδο σταθερών
συγκλίσεων

$$e^{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad , \qquad e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$$

και $$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n}\, dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Και μένει να υπολογίσω: $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$.

Υποθέτω: $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, $I = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$

και: $I^2 = I \cdot I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx\,dy$$

• Αν τα όρια ολοκλήρωσης δεν εξαρτ. από τις μεταβλητές μέσα μπορώ να το γράψω σαν γινόμενο ολοκληρωμάτων

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)} \cdot r\,dr\,d\theta$$

<u>Πολικό σύστημα</u>: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Είμαι στο 1ο τεταρτημόρ. $\Longrightarrow$ ακτίνα άπειρη και γωνία από 0 έως $\pi/2$.

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \int_0^{\infty} r\, e^{-r^2} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot du = \pi/4$$

Θέτω $u = r^2$

$\frac{1}{2} du = r dr$

Άρα $I^2 = \pi/4 \Longrightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\int_0^{\infty} e^{-u} du = 1$

<u>Συνολικά</u>: $\mathcal{I}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

<u>Παρατηρήσεις</u>! Πότε χρησιμοποιώ την μέθοδο των σειρών.

1ο) Όταν μια μικρή παράμετρος είναι μέρος του ορίσματος της συνάρτησης

2ον) Όταν η μικρή παράμετρος είναι μέρος της συνάρτησης αλλά όχι μες το όρισμα

3ον) Σε αόριστα ολοκληρώματα.

4ον) Σε γενικευμένα ολοκληρώματα όταν μπορώ να απομονώσω το ∞ όριο.

Οταν η μεθοδοι αποτυγχάνει θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε

Ολοκλήρωμα κατά παράγοντες : D

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα : $I(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt$

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα όχι μόνο δεν υπολογίζεται βάση στοιχειωδών συναρτήσεων αλλά αποκλίνει και γύρω από το $t=0$

Παρόλα αυτά εφαρμόζω τη μέθοδο των σειρών.

Δηλαδή : $e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{n!}$

$$I(x) = \int_{x}^{\infty} t^{-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{n!}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{\int_{x}^{\infty} t^{n-2}\, dt}_{\uparrow}$$

Δεν μπορώ να το υπολογίσω.

Από Α. Λογισμό : $\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du.}$ ✓

1η επιλογή (α)

$u = e^{-t}$

$dv = \frac{dt}{t^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{t}$

2η επιλογή (β)

$u = \frac{1}{t^2}$

$dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t}$

Για την (α) επιλογή : $\int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt = \frac{-e^{-t}}{t}\Big|_{x}^{\infty} - \int_{x}^{\infty} \left(-\frac{1}{t}\right)\left(-e^{-t}\right) dt$

$$= \frac{e^{-x}}{x} - \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

και ξανά το $\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = e^{-x} \ln x - \int_{x}^{\infty} e^{-t} \ln t\, dt.$

Για μεγάλα x ο αλγόριθμος είναι πιο σημαντικός από το x στον παρανομαστή άρα όχι καλή παραγοντική.

Για την (b) επιλογή:

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \frac{-e^{-t}}{t^2}\Bigg|_x^{\infty} - \int_x^{\infty} \left(-e^{-t}\right)\left(-\frac{2}{t^3}\right)dt$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^2} - 2\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3}\,dt$$ Ξανακάνω παραγοντική.

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^3}\,dt = \frac{e^{-x}}{x^3} - 3\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^4}\,dt$$

Άρα ο σωστός τρόπος για παραγοντική είναι ο (b)

Επαναλαμβάνω την διαδικασία και βρίσκω ότι το:

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = e^{-x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \dots\right)$$

με n-οστό όρο: $(-1)^n (n+1)! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}}\,dt$.

Δ.δ το $$\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = e^{-x} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{N-1} \cdot n!}{x^{n+1}} + e^{-x}\, O\left(\frac{1}{x^{N+2}}\right)$$

Άσκηση: $I(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ με παραγοντική ολοκλήρωση

SOSMPA

Το x δεν είναι μέρος των ορίων

31|3|2016

Η αποτυχία της μεθόδου της παραγοντικής ολοκλήρωσης.

Η μέθοδος της παραγοντ. ολοκλήρωσης είναι αρκετά αυστηρή και περιορισμένη. Δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε μεγάλο φάσμα προβλημάτων. Συγκεκριμένα δίνει ρεαλιστικά αποτελέσματα όταν στο ολοκλήρωμα περιέχονται όροι της μορφής $\frac{1}{x}$.

Παράδειγμα: Γνωρίζουμε : $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$, $x>0$.

Παραγοντική $\Longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2xt}\right)\left(-2x\,t\cdot e^{-xt^2}\right)dt$.

$$= \int_0^{\infty}\frac{1}{(-xt^2)'}\,(-xt^2)'\,e^{-xt^2}dt$$

$$= \frac{e^{-xt^2}}{-2xt}\Bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{1}{2x\,t^2}\cdot e^{-xt^2}dt.$$

Η μέθοδος αποτυγχάνει. D

Γενικεύουμε: και εξετάζουμε ολοκληρώματα της μορφής :

$$\boxed{I(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\,e^{x\psi(t)}dt}$$ ΣΟΣ

Τα ολοκληρώματα αυτά ονομάζονται τύπου Laplace.

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης ορίζεται ως το

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}dt.$$

Σκοπός μας σε αυτά τα ολοκληρώματα είναι να βρούμε τις αναγκαίες συνθήκες που ικανοποιούν οι συναρτήσεις f και ϕ και να τα απλοποιήσουμε.

Ζητάμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του $I(x)$ καθώς $x \to +\infty$.

Γράφουμε το ολοκλήρωμα ως:

$$I(x) = \int_a^b \frac{1}{x}\cdot\frac{f(t)}{\phi'(t)}\Big[\underbrace{e^{x\phi(t)}}_{=\phi'(t)\cdot x}\Big]' dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_a^b \frac{f(t)}{\phi'(t)}\,\frac{d}{dt}\left[e^{x\phi(t)}\right].dt \quad \text{(παραγοντική)}$$

$$= \frac{1}{x}\,\frac{f(t)}{\phi'(t)}\,e^{x\phi(t)}\Big|_{\alpha}^{b} - \frac{1}{x}\int_{\alpha}^{b}\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{\phi'}\right)e^{x\phi(t)}dt.$$

Υποθέτουμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα συγκλίνει και είναι τάξης μικρότερο από το αρχικό. (δηλ. μπορώ να το αγνοήσω καθώς το $x \to +\infty$)

δηλ. $x \to +\infty$ το $I(x)$ μπορώ να το προσεγγίσω:

$$I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\left[\frac{f(b)}{\phi'(b)}\,e^{x\phi(b)} - \frac{f(a)}{\phi'(a)}\,e^{x\phi(a)}\right].$$

Συνεπώς: για να ισχύει η ανάλυση μας θα πρέπει:

(α) Οι συναρτήσεις ϕ, f, ϕ' να είναι συνεχής στο $[a, b]$ (επί της ουσίας η συνέχεια χρειάζεται μόνο στα άκρα)

(β) $\phi'(t) \neq 0$ στο $[\alpha, b]$ και τουλάχιστον ένα από τα $f(a)$ και $f(b)$ να είναι μη-μηδενικό.

Παράδειγμα:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sinh^2 t}\,dt, \quad x>0.$$

$\sinh t = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right)$, $\phi(t) = -\sinh^2 t$

$\phi'(t) = -2\sinh t\cdot\cosh t$ με $\phi'(0)=0$

$\Longrightarrow$ Η μέθοδος αποτυγχάνει. στο $[0,\infty)$

Βασιζόμενοι στα προηγούμενα αρκεί (για $x \to +\infty$)

$I(x) \cong I_1(x)$, όπου:

$$I_1(x) = \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, dt = \int_0^{\varepsilon} e^{-xt} \cdot \underbrace{\sum^{+\infty} (-1)^n t^n}_{= \frac{t}{1+t},\ |t|<1} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\varepsilon} t^n \cdot e^{-xt} dt .$$

ολοκλήρωση: κατά μέρη

$$\left[\cdot \int_0^{\varepsilon} t^n \cdot e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}} - e^{-\varepsilon x} \left[\frac{\varepsilon^n}{x} + \frac{n}{x^2} \varepsilon^{n-1} + \dots + \frac{n!}{x^{n+1}} \right] \right.$$

$$= \frac{n!}{x^{n+1}} + \text{εκθετ. μικρ. όροι}$$

Το $\int t^n e^{-xt} dt$, η φυσικώς το υπολογίζω:

$$\left(\begin{array}{l} \int t e^{-xt} dt = -\int \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-xt} \right) dt = -\frac{\partial}{\partial x} \int e^{-xt} dt \\ \int t^2 e^{-xt} dt = \int \frac{d^2}{dx^2} \left(e^{-xt} \right) dt = \frac{d^2}{dx^2} \int e^{-xt} dt \quad \text{κ.ο.κ.} \end{array} \right)$$

Άρα συνολικά βρήκαμε: $\boxed{I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}}$, $x \to +\infty$.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε καλείται λήμμα του Watson.

Λήμμα του Watson

Έστω το ολοκλήρωμα $I(x) = \int_0^b f(t)\, e^{-xt} dt$, $b>0$

Αν η f: ολοκληρώσιμη στο $(0,b)$ και μπορεί να γραφεί σε μορφή σειράς ως: $f(t) = t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta_1 - n}$, $t \to 0$ $\quad \alpha > -1$, $\beta > 0$.

Τότε : $I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{x^{\alpha+\beta n+1}}$, $x \to \pm\infty$.

όπου Γ: η συνάρτηση Γάμμα.

Απόδειξη:

Γράφουμε το $I(x) = I_1(x) + I_2(x) = \int_0^R f(t)\, e^{-x(t)} dt + \int_R^b f(t)\, e^{-x(t)} dt$

Αν $b < +\infty$ αρκεί να φράξω: $|f(t)| \le A$

Τότε: $\int_R^b f(t)\, e^{-xt} dt < \int_R^b A\, e^{-x} dt = \frac{A}{x}\left(e^{-xR} - e^{xb}\right)$.

Αν $b \to +\infty$ τότε αρκεί $|f(t)| \le A e^{ct}$ για να δείξουμε ότι το I_2 αποτελείται από εκθετικά μικρούς όρους.

Για $x \to +\infty$ $I \sim I_1 = \int_0^R f(t)\, e^{-xt} dt$

$$= \int_0^R \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^{\alpha+\beta n} \cdot e^{-xt} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^R t^{\alpha+\beta n} \cdot e^{-xt} dt$$

$$\int_0^R t^{\alpha+\beta n} \cdot e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta n} \cdot e^{-xt} dt - \underbrace{\int_R^{+\infty} t^{\alpha+\beta n} \cdot e^{-xt} dt}_{\text{εκθετικά μικροί όροι}}$$

Ορίζω $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ τότε:

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha+\beta n} \cdot e^{-xt} dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{x^{\alpha+\beta n+1}}$$

Τελικά: $I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{x^{\alpha+\beta n+1}}$, $x \to +\infty$.

Γενικότερα η μέθοδος Laplace μπορεί να καταλήξει ότι:

$$I(x) = \int_a^b f(t)\, e^{-x\phi(t)}\, dt$$ υπάρχει $c \in [a,b]$ ΣΟΣ

με $\phi'(c) = 0$, $\phi''(c) > 0$. **τότε**:

$$\int_a^b f(t)\cdot e^{-x\phi(t)}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x\phi(c)}\cdot f(c)\cdot \sqrt{\frac{2\pi}{x\phi''(c)}}$$

Παράδειγμα: ΣΟΣ

Έστω $I(k) = \int_0^{+\infty} e^{-k\sinh^2 t}\, dt$

$\phi(t) = \sinh^2 t$

$\phi'(t) = 2\sinh t + \cosh t$

$= 2\sinh(2t)$

$\phi''(t) = 4\cosh(2t)$

$\phi''(0) = 4.$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-k\sinh^2 t}\, dt = e^{-x\phi(0)}\, f(0)\sqrt{\frac{2\pi}{x\phi''(0)}}$$

$$= e^{-x\cdot 0}\cdot 1\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{4x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

ΣΟΣ

Άσκηση: Ν.Δ.Ο $\int_0^{\pi/2} e^{-x\tan t}\, dt \sim \frac{1}{x}$, $x \to +\infty$. $\square$

Ολοκληρώματα τύπου Fourier

Θεωρούμε ολοκληρώματα της μορφής: $I(k) = \int_a^b f(t)\cdot e^{ikh(t)}\, dt$, στο

Ορίζουμε τον μετασχ. Fourier μια συνάρτησης: $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} - e^{-ikx} f(x)\, dx$

και αντίστοιχα τον αντίστροφο μετασχηματισμό: $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\hat{f}(k)\, dk$

και ορίζουμε μια γενικευμένη συνάρτηση $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-x')}\, dx'$

με την ιδιότητα: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\, dx = f(0)$

$(|x|'' = \delta(x))$

και με ενδιαφέρει η συμπεριφορά του ολοκληρώματος για $k \to +\infty$

Ξεκινώ με το ολοκλήρωμα : $I(k) = \int_a^b f(t)\, e^{ikh(t)} dt$, $f, h \in \mathbb{R}$

Θέτω και κάνω παραγοντική ολοκλήρωση:

Θέτω $u = \frac{f}{h'}$, $dv = e^{ikh} h' \, dt$

$$du = \left(\frac{f}{h'}\right)' dt \qquad v = \frac{1}{ik} e^{ikh(t)}$$

Τότε $I(k) = \left.\frac{f(t) \cdot e^{ikh}}{ikh}\right|_a^b - \frac{1}{ik} \underbrace{\int_a^b \left(\frac{f}{h'}\right)' e^{ikh} dt}_{o\left(\frac{1}{k^2}\right)}$

Άρα: $I(k) \sim \frac{i}{k} \left[\frac{f(a)\, e^{ikh(a)}}{h'(a)} - \frac{f(b)\, e^{ikh(b)}}{h'(b)} \right] + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$

όπου $h'(a) \cdot h'(b) \neq 0$.

Ερώτηση: Τι γίνεται όταν $h'(a) \cdot h'(b) = 0$.

Η μέθοδος της στάσιμης φάσης

θεωρώ το ολοκλήρωμα : $I(x) = \int_a^b f(t)\, e^{ix\psi(t)} dt$

και ακολουθώ τη μεθοδολογία των ολοκληρωμάτων Laplace.

$$I(x) \sim f(a) \left(\underset{C}{\cancel{e}}^{ix\psi(a)} \pm \frac{i\pi}{2p} \right) \cdot \left[\frac{p!}{x\,|\psi^{(p)}(a)|} \right]^{1/p} \cdot \frac{\Gamma(1/p)}{p} \quad , x \to +\infty.$$

όπου p η πρώτη μη-μηδενική παράγωγος. του $\psi^{(p)}(\alpha) \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & (+)\ \psi^{(p)}(\alpha) > 0 \\ \pm \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (-)\ \psi^{(p)}(\beta) < 0. \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα: Ν.Δ.Ο:

$$\int_0^{\pi/2} e^{ix\cos t}\, dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot e^{i(x-\pi/4)} \quad , \ x \to +\infty.$$

$f(t)=1$ $\quad$ $\psi'(t) = -\sin t$ $\quad$ $\psi'(0)=0$

$\psi(t)=\cos t$ $\quad$ $\psi''(t) = -\cos t$ $\quad$ $\psi''(0) = -1 \neq 0$

$\rho = 2$

Άρα:

$$I(x) = 1 \cdot e^{ix \cdot 1 - \frac{i\pi}{2\cdot 2}} \left[\frac{2!}{x\,|\psi''(0)|} \right]^{1/2} \cdot \frac{\Gamma(1/2)}{2}$$

$$= e^{i(x-\pi/4)} \sqrt{\frac{2}{x}} \cdot \frac{\Gamma(1/2)}{2}$$

$$\Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Άσκηση: Ν.Δ.Ο $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. (από ορισμό $\Gamma(x+1) = ..$
$x = -1/2$.

με ολοκλήρωση
κατά παράγοντες $\square$

Θεωρία Διαταραχών (Σε διαφορικές Εξισώσεις).

7/4/2016

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση :

$$u'' + u + \varepsilon u^3 = 0$$
$$u(0) = u_0$$
$$u'(0) = V_0$$
$$0 < \varepsilon << 1.$$

Βήματα:

Θεωρώ το αδιατάρακτο πρόβλημα: $u'' + u = 0$

$\Longrightarrow u = A\cos(t + \phi)$ // $= A\cos t + B\sin t$

Μπορώ να θεωρήσω όπως και στις Αλγεβρικές Εξισώσεις ότι η λύση μπορεί να γραφεί ως : $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots + \varepsilon^n u_n + \dots$

Ας πούμε ότι εμείς ζητάμε λύσεις ακρίβειας $o(\varepsilon)$ δηλ. το : $u = u_0 + \varepsilon u_1 \ (+ o(\varepsilon^2))$

Αντικαθ. στην εξίσωση :

$$u'' + u + \varepsilon u^3 = 0 \Longrightarrow (u_0 + \varepsilon u_1)'' + (u_0 + \varepsilon u_1) + \varepsilon (u_0 + \varepsilon u_1)^3 = 0$$

Αγνοώ όρους με ε^2 και παραπάνω $\Longrightarrow$

$$u_0'' + \varepsilon u_1'' + u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon(u_0^3 \cancel{+ 3u_0^2 \varepsilon u_1}) = 0.$$

Αγνοώ

άρα: $(u_0'' + u_0) + \varepsilon(u_1'' + u_1 + u_0^3) = 0.$

SOS.

Διαχωρίζω τις τάξεις :

ε^0!

o(1) : $u_0'' + u_0 = 0$ (το αδιατάρακτο πρόβλημα)

o(ε) : $u_1'' + u_1 = -u_0^3$

- Λύνουμε το αδιατάρακτο πρόβλημα $o(1)$: $u_0'' + u_0 = 0$

Η λύση θα είναι : $u_0 = \alpha_0 \cos(t + \beta_0)$, $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$.

Τότε μπορώ να προχωρ. στο επόμενο τάξης πρόβλημα :

$$u_1'' + u_1 = \alpha_0^3 \cos^3(t+\beta_0)$$

Μου αρκεί μια λύση της ομογενούς : sint ή cost

και γράφω: $\underbrace{u_1}{} = \sin t\, v$

$u_1' = \cos t\, v + \sin t\, v'$

Τότε: $u_1'' + u_1 = -\cancel{\sin t\, v} + \cos t\, v' + \cos t\, v' + \sin t\, v'' \cancel{+ \sin t\, v}$

$= \alpha_0^3 \cos^3(t+\beta_0).$

$\Leftrightarrow \quad v'' + 2\cot t\, v' = \alpha_0^3 \cdot \cos^3(t+\beta_0) \cdot \frac{1}{\sin t}$

$V = v' \quad \Rightarrow$

$$V' + 2\cot t\, V = \alpha_0^3 \cos^3(t+\beta_0)\frac{1}{\sin t}$$

Τη λύνω με ολοκληρ. παράγοντα:

$\boxed{\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta}$

Γενικά: $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Έτσι υπολογίζω μεγάλες δυνάμεις

Μπορώ να γράψω την εξίσωση : $u_1'' + u_1 = \frac{\alpha_0^3}{4} \cdot \cos(3t + 3\beta_0) + \frac{3\alpha_0^3}{4}\cos(t+\beta_0)$

άρα μια μερική λύση: ??

$$u_p = -\frac{3}{8} a_0^3 t \sin(t+\beta_0) + \frac{a_0^3}{32}\cos(3t+3\beta_0).$$

Άσκηση (Γιατί είναι μερική)

$$\Longrightarrow u_1 = \alpha_1 \cos(t+\beta_1) - \frac{3}{8}\alpha_0^3 t \sin(t+\beta_0) + \frac{a_0^3}{32}\cos(3t+3\beta_0)$$

Και η συνολική τάξης λύση $\varepsilon\,(o(\varepsilon))$ θα είναι:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 = \alpha_0 \cos(t+\beta_0) + \varepsilon\left[\alpha_1 \cos(t+\beta_1) - \frac{3}{8}\alpha_0^3 t \sin(t+\beta_0) + \frac{\alpha_0^3}{32}\cos(3t+3\beta_0)\right.$$

<u>**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**</u> Οι σταθερές που προκύπτουν $\alpha_0\ \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ θα πρέπει να βρεθούν από τις αρχ. συνθήκες : $u(0) = u_0$
$u'(0) = V_0$

<u>ΠΑΝΤΑ</u> θα προκύπτουν παραπάνω σταθερές από τις αρχικές συνθήκες. Για να υπολογ. όλες τις σταθερές αντικαθιστώ στην προσεγγιστική που βρήκα.

<u>Αντικαθιστούμε:</u> $u(0) = u_0 \iff \alpha_0 \cos\beta_0 + \varepsilon\left[\alpha_1 \cos\beta_1 + \frac{\alpha_0^3}{32}\cos 3\beta_0\right] = u_0$

$u'(0) = V_0 \iff$

$$-\alpha_0 \sin\beta_0 - \varepsilon\left[\alpha_1 \sin\beta_1 + \frac{3}{8}\alpha_0^3 \sin\beta_0 + \frac{3}{32}\alpha_0^3 \sin 3\beta_0\right] = V_0$$

<u>Στην τάξη $o(\varepsilon)$:</u>

$$\alpha_0 \cos\beta_0 = u_0$$
$$-\alpha_0 \sin\beta_0 = V_0$$

(παραλείποντας όρους του ε)

Τετραγωνίζω και προσθέτω
διαιρώ:

$$\begin{cases} \alpha_0^2 \cos^2\beta_0 + \alpha_0^2 \sin^2\beta_0 = u_0^2 + V_0^2 \\ \tan\beta_0 = \frac{-V_0}{u_0} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0^2 = u_0^2 + V_0^2 \\ \tan\beta_0 = -\frac{V_0}{u_0} \end{cases}$$

Σε τάξη $o(\varepsilon)$: Βρίσκω ότι:

??!

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0^3}{32}\sqrt{\cos^2(3\beta_1) + 9\,(\sin(3\beta_0) + 4\sin\beta_0)^2}\ .$$

$$\cos\beta_1 = \frac{-\alpha_0^3 \cos(3\beta_0)}{32\alpha_1}.$$

Η ακριβής λύση: $u''+u+\varepsilon u^3=0$ 2ου βαθμού ομογενής μη γραμμική και αυτόνομη (δεν υπάρχει η ανεξάρτ. μεταβλητή)

Επίσης λείπει και η u'. Τότε πολλαπλασιάζω με u' και ολοκληρώνω

$$\underbrace{\int u''u'dt}_{\frac{1}{2}(u')^2} + \underbrace{\int uu'dt}_{\frac{u^2}{2}} + \varepsilon \underbrace{\int u^3u'dt}_{\varepsilon\frac{u^4}{4}} = 0$$

// διότι: $y=u'$

$dy=u''dt$

$$\int u''u'dt = \int y\,dy = \frac{y'}{2} = \frac{(u')^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{u^2}{2} + \varepsilon\frac{u^4}{4} = c$$

$$\Rightarrow (u')^2 + u^2 + \varepsilon\frac{u^4}{2} = c$$

Για $t=0$: $(u'(0))^2 + (u(0))^2 + \varepsilon\frac{(u(0))^4}{2} = c$

$$\Rightarrow c = V_0^2 + u_0^2 + \varepsilon\frac{u_0^4}{2}$$ (Υποθ. διατήρηση της ενέργειας)

Το $(u')^2 = c - u^2 - \varepsilon\frac{u^4}{2}$

$$\frac{du}{dt} = \pm\sqrt{c-u^2-\varepsilon\frac{u^4}{2}} = f(u)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{du}{f(u)} \Rightarrow t = \int_{u_0}^{u}\frac{du'}{f(u)}$$ (Έχω βρει λύση για την αντιστροφή).

Προσοχή

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν υπήρχε και ο όρος u' δλδ

$u''+\underline{u'}+u+\varepsilon u^3=0$, η μέθοδος δεν θα είχε αποτέλεσμα

Δεν μπορώ να υπολογίσω το $\int (u')^2\,dt$

Χρησιμοποιώ την αντικατάσταση: $u' = w(u)$

$$\Rightarrow \quad u'' = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{du}\cdot\frac{du}{dt}$$

δηλδ το $u'' = w' \cdot u' = w \cdot w'$

Άρα συνολικά : $u'' + u' + u + \varepsilon u^3 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{ww' + w = -u - \varepsilon u^3 = f(u)}$$

Έφυγα κατα 1 την εξίσωση και το u είναι τώρα ανεξάρτ. μεταβλητή.

Μεταβολή των Παραμέτρων

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών :
$$\begin{cases} u'' + u + \varepsilon u^3 = 0 \\ u(0) = x_0 \\ u'(0) = V_0 \end{cases}$$

Για το πρόβλημα αυτό γνωρίζω ότι αν $\varepsilon = 0$: $u'' + u = 0$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \alpha \cos(t+\beta)$$

Θεωρώ τις σταθερές α και β ως τις παραμέτρους του συστήματος και ότι δεν είναι πλέον σταθερές αλλά μεταβάλλονται με τον χρόνο

δηλδ $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$

Άρα: $u'(t) = \alpha' \cos(t+\beta) - \alpha \sin(t+\beta) - \alpha\beta' \sin(t+\beta)$

Αν α και β σταθερές $\Rightarrow$ $u'(t) = -\alpha \sin(t+\beta)$

Για να διατηρήσω τον χαρακτήρα της εξίσωσης θέτω:

$$\boxed{\alpha' \cos(t+\beta) - \alpha\beta' \sin(t+\beta) = 0}$$

Για την δεύτερη παράγωγο βρίσκω :

$$u'' = -\alpha \cos(t+\beta) - \alpha' \sin(t+\beta) - \alpha\beta' \cos(t+\beta).$$

και αντικαθιστώ στην Εξίσωση : $u'' + u + \varepsilon u^3 = 0$

$$\Longrightarrow -\alpha\cos(t+\beta) - \alpha'\sin(t+\beta) - \alpha\beta'\cos(t+\beta) + \alpha\cos(t+\beta) + \\ + \varepsilon\cdot\alpha^3\cos^3(t+\beta) = 0.$$

Άρα συνολικά έχω :

$$\begin{cases} \alpha'\cos(t+\beta) - \alpha\beta'\sin(t+\beta) = 0 \\ \alpha'\sin(t+\beta) + \alpha\beta'\cos(t+\beta) = \varepsilon\alpha^3\cos^3(t+\beta) \end{cases}$$

|| ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΤΡΟΦΗΣ

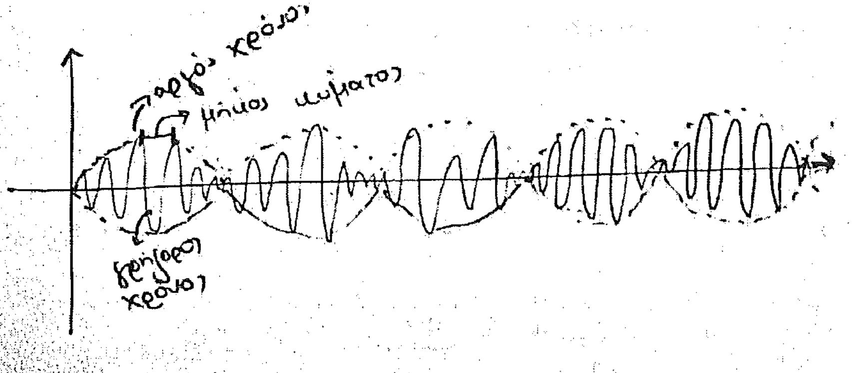
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t+\beta) & -\sin(t+\beta) \\ \sin(t+\beta) & \cos(t+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon\alpha^3\cos^3(t+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+\beta) & \sin(t+\beta) \\ -\sin(t+\beta) & \cos(t+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon\alpha^3\cos^3(t+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha' = \varepsilon\alpha^3\cos^3(t+\beta)\sin(t+\beta) \\ \alpha\beta' = \varepsilon\alpha^3\cos^4(t+\beta) \quad \Rightarrow \quad \beta' = \varepsilon\alpha^2\cos^4(t+\beta) \end{cases}$$

Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων καταλήγει σε ένα σύστημα για τις παραμέτρους που πιθανόν να είναι και πιο δύσκολο στην επίλυση του από αυτό που ξεκινήσαμε όμως παρέχει πλήρη λύση για το σχολικό πρόβλημα και μπορώ να χρησιμοποιήσω θ. Διαταραχών για τον υπολογισμό των α, β. (μηδενίζω τον όρου των α', β'.

Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων



$$\left(y'' + \alpha y' + \beta y = f(x)\right).$$

Ορίζουμε την λύση της εξίσωσης ως:

$$u(t,\varepsilon) = u(t, t_1, t_2, \dots, t_n)$$

όπου:

$$t_1 = \varepsilon t$$
$$t_2 = \varepsilon^2 t$$
$$\vdots$$
$$t_n = \varepsilon^n t.$$

Συνεπώς έχω μια ιεραρχία χρόνου:

$$t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t, \dots, \quad t_n = \varepsilon^n t.$$

Τότε:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t_0} \cdot \frac{\partial t_0}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_n} \cdot \frac{\partial t_n}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t_2} + \dots + \varepsilon^n \frac{\partial u}{\partial t_n}.$$

Όμοια, βρίσκω δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial t_0}\right) + \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) + \dots$$

- $$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt_0}\right) = \frac{\partial}{t_0}\left(\frac{\partial u}{\partial t_0}\right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_0}\right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial u}{\partial t_0}\right) + \dots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 407

Έστω $u(t,\varepsilon) = u(t_0, t_1)$ (δις)

$= u(t, \varepsilon t)$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t_0} \cdot \frac{\partial t_0}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t_1}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t_0}}_{Z_1}\right) + \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t_1}}_{Z_2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial t_0^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_0} + \varepsilon \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_0 \partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial t_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_0} + \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{\partial t_1^2}$$

- Άρα το αρχικό πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα μερικών παραγώγων.

Θεωρούμε την εξίσωση : $u'' + u + \varepsilon u^3 = 0$.

με $u = u(t,\varepsilon) = u(t_0, t_1)$

Αντικαθιστώ το :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + u + \varepsilon u^3 = 0$$

Επιπλέον : $u = u_0 + \varepsilon u_1$.

Άρα αγνοώ όρους $o(\varepsilon^2)$ και πάνω :

και καταλήγω στο σύστημα:

$\underline{o(1)}$: $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2} + u_0 = 0$ $\quad \varepsilon = 0 \quad u_0'' + u_0 = 0$

$u_1'' + u_1 = -u_0^3$

$\varepsilon \quad \underline{o(\varepsilon)}$: $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0 \partial t_1} - u_0^3$.

14/4

Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων

Ορίζουμε παραπάνω από μια ανεξάρτητες μεταβλητές που αντιστοιχούν στις διαφορετικές κλίμακες. Δηλαδή αν έχω $0 < \varepsilon << 1$.

Τότε : $t_0 = t, \ t_1 = \varepsilon t, \ t_2 = \varepsilon^2 t, \ldots, \ t_n = \varepsilon^n t$.

και αντίστοιχα για τις μερικές παραγώγους :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t \partial t_1} + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial t \cdot \partial t_2} + \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \right) + \dots$$

Η αρχική μου εξίσωση είναι : $\underline{u'' + u + \varepsilon u^3 = 0}$

Αντικαθιστώ τις παραγώγους και αναπτύσσω σε σειρά το u:

$$\Longrightarrow u = u_0(t_0, t_1, .. t_n) + \varepsilon u_1(t_0, t_1, \dots, t_n) + \varepsilon^2 u_2(t_0, t_1, \dots, t_n) + \dots$$

Τελικά: στις διάφορες τάξεις του ε έχω:

$\underline{o(1)}$: $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2} + u_0 = 0$ (μερική παράγωγος).

Λύση της μερικής διαφορικής :

Η λύση της είναι ακριβώς η λύση της ολικής εξίσωσης με ολικές παραγώγους αλλά αντί σταθερών θα έχω συναρτήσεις των μεταβλητών εκτός του t_0.

Η λύση της εξίσωσης θα είναι :

$$u_0 = A \cos\left((t_0, t_1 .. t_n) + \beta(t_1, t_2 \dots)\right)$$

$U_0(t) = A \cos(t + b(t))$

Θεωρώ ότι έχω μόνο δυο κλίμακες : $\begin{cases} t_0 = t \\ t_1 = \varepsilon t \end{cases}$

άρα:

$$\Longrightarrow u = u_0(t_0, t_1) + \varepsilon u_1(t_0, t_1) + \dots$$

Από την εξίσωση $o(\varepsilon)$ θα βρω : υ_1 :

$\underline{o(\varepsilon)}$: $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial^2 t_1} + u_1 = -2 \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial t_0 \partial t_1} - u_0^3$

Αντικαθ. το u_0:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 t_1} + u_1 = 2\,\frac{\partial A}{\partial t_1}\sin(t_0+\beta) + 2A\,\frac{\partial \beta}{\partial t_1}\cos(t_0+\beta)$$

$$-\frac{3}{4}A^3\cos(t_0+\beta) - \frac{A^3}{4}\cos(3t_0+3\beta)$$

Χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα που μεταφέρει την τρίτη δύναμη στο όρισμα (Δυνάμεις στα τριγων. δεν δίνουν πληροφορία)
Μόνο τα ορίσματα τους.

Η λύση της ομογενούς: $\frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 t_1} + u_1 = 0$

είναι ίδιας μορφής (γραμμ. εξαρτημ) από μέρος της μη-ομογενούς.
Αυτό επιβάλλει να ορίσουμε όρους που περιέχουν πολυώνυμα: ως λύσεις της μη-ομογενούς.

Γιατί; Για να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Για να το αποφύγω από (αν είχα τέτοιους όρους στη λύση της u_1 τότε καθώς το $t \to +\infty$, $u_1 >> u_0$) ($t \to +\infty$ η προσέγγιση καταρρέει Το u_1 καταλήγει να είναι πιο σημαντικό από το u_2)
(Δεν θα ισχύει η θεωρία)

άρα θέλω: $\frac{\partial A}{\partial t_1} = 0$ και $2A\frac{\partial \beta}{\partial t_1} - \frac{3A^3}{4} = 0$.

Όμως εφόσον έχω δύο χρόνους:
$A = A(t_1)$ και $B = B(t_1)$

δλδ : λύνω το σύστημα ($A \neq 0$)

$$\begin{cases} A' = 0 \\ 2B' - \frac{3}{4}A^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = A \quad \text{σταθερά} \\ \beta = \frac{3}{8}A\,t_1 + c \end{cases}$$

(Η λύση λοιπόν) Η κυριαρχης τάξης λύση είναι τελικά:

$$u_0(t_0, t_1) = A\cos\left(t_0 + \frac{3}{8} A t_1 + c\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{u_0(t, \varepsilon) = A\cos\left(t + \frac{3A}{8}\varepsilon t + c\right)}$$

Πλέον η εξίσωση γίνεται για το u_1:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0^2} + u_1 = -\frac{1}{4} A^3 \cos(3t_0 + 3\beta)$$

Για να βρω u' χρειάζομαι την $o(\varepsilon^2)$:

- Με την μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων ξεπερνώ τα προβλήματα της βασικής θεωρίας διαταραχών όπου όροι ανώτερης τάξης γίνονται σημαντικότεροι καθώς το $t \to +\infty$, δ/δ αποφεύγω όρους που προκαλούν συντονισμούς.

Συντονισμός:

$$\underbrace{y'' + y}_{\cos t + \sin t \text{ οι λύσεις}} = \cos(t) \swarrow \text{πηγή}$$

Μια ταλάντωση

Η πηγή συντονίζει το σύστημα.

- Ο τρόπος επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων με συναρτήσεις $\sin\theta$ ή $\cos\theta$ καλύτερα γίνεται με τη χρήση των ταυτοτ. αυτών.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \end{aligned}}$$

5ος

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η λύση της $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t_0^2} + u_0 = 0$

είναι: $u_0(t_0, t_1) = A\cos(t_0+\beta)$

$$= \frac{1}{2}A\left(e^{i(t_0+\beta)} + e^{-i(t_0+\beta)}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}Ae^{i\beta}\right)e^{it_0} + \left(\frac{1}{2}Ae^{-i\beta}\right)e^{-it_0}.$$

$$= \alpha e^{it_0} + \bar{\alpha} e^{-it_0} = \alpha \cdot e^{it_0} + c.c$$

↓ complex conjugate
συζυγής μιγαδικός.

όπου: $\alpha = Ae^{i\beta}$, $\bar{\alpha} = Ae^{-i\beta}$

Τότε: $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} + u_1 = \frac{-2\partial^2 u_0}{\partial t_0 \partial t_1} - u_0^3$.

Αντικαθ. το u_0: $= \frac{-\partial^2(\alpha e^{it_0} + \bar{\alpha} e^{-it_0})}{\partial t_0 \partial t_1} - (\alpha e^{it_0} + \bar{\alpha} e^{-it_0})^3$

Αναλύω (πράξεις ΕΔΔ)

!!

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_1^2} + u_1 = -\underbrace{\left(2i\frac{\partial \alpha}{\partial t_1} + 3\alpha^2\bar{\alpha}\right)e^{it_0} + \left(2i\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t_1} - 3\bar{\alpha}^2\alpha\right)e^{-t_0 i}}_{\text{Συζυγής κατά ζεύγη}} - \alpha^3 e^{3it_0} - \bar{\alpha}^3 e^{-3it_0}.$$

Αν βρω τη μια ΔΔΔ έχω βρει και την άλλη αφού είναι συζυγής.

Άρα η λύση που αποτρέπει συντονισμούς είναι αυτή που ικανοποιεί την

$$2i\frac{\partial \alpha}{\partial t_1} + 3a^2\bar{\alpha} = 0$$ (και ο συζυγής του).

Η παράσταση $a^2 \cdot \bar{a} = \alpha \cdot \alpha \cdot \bar{\alpha} = |\alpha|^2 \cdot a$.

Δηλαδή: $2i\frac{\partial \alpha}{\partial t_1} + 3|\alpha|^2 \cdot a = 0$.

Αν ορίσω: $\alpha = \frac{1}{2} A e^{i\beta}$ $\Rightarrow |\alpha|^2 = A^2 \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} = \left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + i A \frac{\partial B}{\partial t_1} \right) e^{i\beta}$$

Αντικαθιστώ:

$$2i \left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + i A \frac{\partial B}{\partial t_1} \right) \cancel{e^{i\beta}} + 3A^2 \cdot A \cdot \cancel{e^{i\beta}} = 0 .$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t_1} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t_1} = \frac{3}{8} A^2 . \end{cases}$$

Μη ομογενείς Εξισώσεις

Γενικεύουμε την εξίσωση : $u'' + u + 2\epsilon\mu u' + \epsilon u^3 = F\cos(\omega t)$

$\mu > 0$, $0 < \epsilon << 1$.

Από τη Θ. Διαταραχών : $u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$

Αντικαθ. λοιπόν στην εξίσωση : και στις διάφορες τιμές του ε :

1) o(1) : $u_0'' + u_0 = F\cos(\omega t)$

o(ε) : $u_1'' + u_1 = -2\mu u_0' - u_0^3$.

Λύνουμε την o(1) : $u_0 = v_p + v_n$.

$u_n = A\cos(t + \beta)$

$v_p = B\cos(\omega t + \beta) + C\sin(\omega t + \beta)$

Βρίσκω:

$$\Rightarrow u_p = \frac{F}{1 - \omega^2} \cos(\omega t + \beta).$$

Αντικαθ. το u_0:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 t_1} + u_1 = 2\,\frac{\partial A}{\partial t_1}\sin(t_0+\beta) + 2A\,\frac{\partial \beta}{\partial t_1}\cos(t_0+\beta)$$

$$-\frac{3}{4}A^3\cos(t_0+\beta) - \frac{A^3}{4}\cos(3t_0+3\beta)$$

Χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα που μεταφέρει την τρίτη δύναμη στο όρισμα (Δυνάμεις στα τριγων. δεν δίνουν πληροφορία)
Μόνο στα ορίσματα τους.

Η λύση της ομογενούς : $\frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 t_1} + u_1 = 0$

είναι ίδιας μορφής (γραμμ. εξαρτημ) ~~από~~ μέρος της μη-ομογενούς.

Αυτό επιβάλλει να ορίσουμε όρους που περιέχουν πολυώνυμα: ως λύσεις της μη-ομογενούς.

Γιατί; Για να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Για να το αποφύγω από (αν είχα τέτοιους όρους στη λύση της u_1 τότε καθώς το $t\to+\infty$, $u_1 >> u_0$) ($t\to+\infty$ η προσέγγιση καταρρέει Το u_1 καταλήγει να είναι πιο σημαντικό από το u_2)
(Δεν θα ισχύει η θεωρία)

άρα θέτω : $\frac{\partial A}{\partial t_1} = 0$ και $2A\frac{\partial \beta}{\partial t_1} - \frac{3A^3}{4} = 0$.

Όμως εφόσον έχω δύο χρόνους :
$A = A(t_1)$ και $B = B(t_1)$

δηλ : λύνω το σύστημα ($A \neq 0$)

$$\begin{cases} A' = 0 \\ 2B' - \frac{3}{4}A^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = A & \text{σταθερά} \\ \beta = \frac{3}{8}A\,t_1 + c \end{cases}$$

(Η λύση λοιπόν) Η κυριότερης τάξης λύση είναι τελικά:

$$u_0(t_0,t_1) = A\cos\left(t_0 + \frac{3}{8}A t_1 + c\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{u_0(t,\varepsilon) = A\cos\left(t + \frac{3A}{8}\varepsilon t + c\right)}$$

Πλέον η εξίσωση γίνεται για το u_1:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_0^2} + u_1 = -\frac{1}{4}A^3\cos(3t_0 + 3\beta)$$

Για να βρω u' χρειάζομαι την $o(\varepsilon^2)$:

- Με την μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων ξεπερνώ τα προβλήματα της βασικής θεωρίας διαταραχών όπου όροι ανώτερης τάξης γίνονται σημαντικότεροι καθώς το $t \to +\infty$, διότι αποφεύγω όρους που προκαλούν συντονισμούς.

Συντονισμός:

$$\underbrace{y'' + y}_{\cos t+\sin t \text{ οι λύσεις.}} = \overset{\swarrow \text{πηγή}}{\cos(t)}$$

Μια ταλάντωση

Η πηγή συντονίζει το σύστημα.

- Ο τρόπος επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων με συναρτήσεις $\sin\theta$ ή $\cos\theta$ καλύτερα γίνεται με τη χρήση των ταυτοτ. αυτών.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \end{aligned}}$$

Δηλαδή : η εισοδική λύση :

$$u_0 = A\cos(t_0+\beta) + \frac{F}{1-\omega^2}\cos(\omega t+\beta)$$

Αν $\omega = \pm 1$ τότε έχουμε συντονισμούς και το σύστημα καταρρέει.

Αν $\omega \neq \pm 1$ η θεωρία σωστή.

Άσκηση : Στην περίπτωση $\omega \neq \pm 1$ να βρεθεί λύση u_1.

Παρατήρηση : Στην λύση u_1 που θα βρούμε θα υπάρχουν και άλλα ω για τα οποία μηδενίζονται παρονομαστές. Οι λύσεις αυτές λέγονται δευτερεύοντες συντονισμοί. (θα βρω $\omega = 0, 3, \frac{1}{3}$).

Στις περιπτώσεις αυτές ο μόνος τρόπος να αποτρέψουμε τους δευτερεύοντες συντονισμούς είναι η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων.

Ιδιόμορφες Εξισώσεις : SOS.

Θεωρούμε την εξής : $y'' + 2\varepsilon y' + \omega_0^2 y = 0$ $\quad 0 < x < 1$, $\quad 0 < \varepsilon << 1$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Γράφω την εξίσωση σε μορφή σειράς:

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$$

Τότε τάξη 1 βρίσκω ότι : $y_0'' + \omega_0^2 y_0 = 0$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$y_0 = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 x).$$ ή $Y_0 = \cos(\omega_0 x)$

Όλες οι επόμενες τάξεις $o(\varepsilon^n)$, $n \geq 1$.

$$y_{n+1}'' + \omega_0^2 y_{n+1} = -2 y_n.$$

π.χ $y_1'' + \omega_0^2 y_1 = -2y_0$

$y_2'' + \omega_0^2 y_2 = -2y_1$ και ικανοποιούν: $\begin{cases} y_{n+1}(0)=0 \\ y \end{cases}$

Δηλαδή για κάθε τάξη του ε έχω μια γραμμική 2ου βαθμού εξίσωση μη-ομογενή με σταθερούς συντελεστές (που είναι πάντα επιλύσιμη) Μπορώ να βρω με χρήση στοιχειωδών συναρτήσεων οποιασδήποτε τάξης ακριβώς. Η προσέγγιση που κάνουμε λέγεται προσέγγιση ~~πε~~ πέρα από όλες τις τάξεις (beyond all orders) (Martin Kruskal – Surreal numbers Peter-Lax.).

6) Παράδειγμα:

$$\varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad 0 \le x \le 1$$

Γράφω τη λύση σε μορφή σειράς $y = y_0 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$

$\Longrightarrow$ $O(1)$: $2y_0' + 2y_0 = 0$

Τα προβλήματα που παρουσιάζονται είναι δύο. 1ο) έχω αλλοιώσει του χαρακτήρα της (αρχικής) εξίσωσης από δευτέρου βαθμού κατέληξα σε πρώτου.

2ον) Δεν μπορώ ταυτόχρονα να ικανοποιήσω τις συνοριακές συνθήκες

Δηλαδή η λύση $O(1)$ εξίσωσης: $y_0 = Ae^{-x}$

$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$y(1) = 1 \Rightarrow Ae^{-x} = 0 \Rightarrow A = e.$

Απορρίπτω το $\underline{A=0}$ (διότι δεν δίνει πληροφορία) και κρατώ $y(1) = 1$ $\Longrightarrow$ $\boxed{y_0 = e^{1-x}}$

Η εκτίμηση ισχύει μόνο για το ένα άκρο $\Longrightarrow$ αλλά καταρρέει εξαρχής.

- Η ιδέα είναι να χωρίσω το διάστημα ολοκλήρωσης σε δύο μέρη. Αυτό οδηγεί με την χρήση μιας επιπλέον μεταβλητής. Βάση αυτής της μεταβλητής θα βρω μια εξίσωση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη (ή συνοριακή) που δεν ικανοποιείται άμεσα από τη θεωρία Διαταραχών. Η μέθοδος αυτή καλείται μέθοδος του οριακού στρώματος (boundery layer theory).

Η μέθοδος του οριακού στρώματος

SOS 12/5.

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών : $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Εφαρμόζω μέθοδο διαταραχών κατά τα γνωστά:

$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$ και αντικαθ. στην εξίσωση:

$$\varepsilon(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \varepsilon^2 y_2'') + 2(y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2') + 2(y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2) = 0.$$

Διαχωρίζω τις τάξεις:

$\underline{O(1)}$: $2y_0' + 2y_0 = 0$

άρα προκύπτει ένα άμεσο πρόβλημα:

Δεν μπορώ να ικανοποιήσω και τις δύο συνοριακές συνθήκες

Δηλαδή : $y_0' + y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = c_1 e^{-x}$

Έχω αλλάξει χαρακτήρα εξίσωσης και ποια από τις δύο συνθήκες πρέπει να ικανοποιείται?

1) το $y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

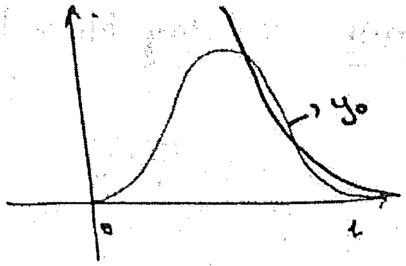
2) $y(1) = 1 \Rightarrow c_1 \cdot e^{-1} = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = e}$

Προφανώς μπορώ να ικανοποιήσω μια από τις δύο και επιλέγω αυτή που δίνει μη-τετριμμένο αποτέλεσμα :

Μένει λοιπόν να ικανοποιήσω και την $y(0)=0$.

Με τη διαδικασία αυτή βρήκα μια προσέγγιση μόνο στο ένα άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης στο $x=1$.

Δηλαδή: αν υποθέσουμε ότι η λύση είναι της μορφής:



Τότε η λύση που βρήκαμε έχει προσεγγιστεί μόνο από τα δεξιά.

Άρα πρέπει να βρω μια άλλη λύση που ικανοποιεί το κομμάτι αριστερά.

Υπάρχει μια λύση της εξίσωσης που ικανοποιεί την $y(0)=0$ και άλλη μια που ικανοποιεί την $y(1)=1$.

Ορίζω μια περιοχή στο $[0,1]$ που αποκαλώ <u>οριακό στρώμα</u>. (boundary laye

ςο) Γράφουμε τη λύση γύρω από $x=0$ ως:

$y=Y(X)$ με $X=\frac{x}{\varepsilon}$ δηλ. $x=\varepsilon X$.

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}=\frac{d}{dX}\cdot\frac{dX}{dx}=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{d}{dX}.$$

και $$\frac{d^2}{dx^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{d^2}{dX^2}$$

Αντικαθιστώ στην εξίσωση:

$$\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2Y}{dX^2}+2\cdot\frac{1}{\varepsilon}\frac{dY}{dX}+2Y=0 \Longrightarrow$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2}+2\frac{dY}{dX}+2\varepsilon Y=0.$$

και εφαρμόζω στην νέα εξίσωση τη <u>μέθοδο Διαταραχών</u>:

$$Y = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \cdots$$

και αντικαθ. στην αρχική :

$$\left(y_0'' + \varepsilon Y_1'' + \varepsilon^2 Y_2''\right) + 2\left(Y_0' + \varepsilon Y_1' + \varepsilon^2 Y_2'\right) + 2\varepsilon\left(Y_0 + \varepsilon Y_1 + \varepsilon^2 Y_2\right) = 0.$$

Διαχωρίζω κατά τα γνωστά :

O(1) : $Y_0'' + 2Y_0' = 0$

$$\xrightarrow[\text{ολοκλ.}]{} \quad Y_0' + 2Y_0 = C_2.$$

ολοκληρ. παραγ : e^{2x}.

Δηλαδή :

$$e^{2x}Y_0' + 2e^{2x}Y_0 = C_2 \cdot e^{2x}$$

$$\Rightarrow (e^{2x} \cdot Y_0)' = C_2 \cdot e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot Y_0 = \int C_2 \cdot e^{2x} dx + C_3$$

$$\Rightarrow e^{2x} \cdot Y_0 = C_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C_3$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_0 = C_3 e^{-2x} + \frac{C_2}{2}}$$

Η εξίσωση: $y' + p(x) \cdot y = R(x)$

από ιδιότητα $\Rightarrow (\mu y)' = \mu' y + \mu y'$

πολλαπλ με $\mu = \mu(x)$

$$\mu y' + \mu p(x) y = \mu R(x)$$

$\Rightarrow$ πρέπει : $\boxed{\mu' = \mu P} \Rightarrow \mu = e^{\int p dx}$

ολοκληρωτικός παράγ

$$\Rightarrow (\mu y)' = \mu R(x) \Rightarrow y = \frac{1}{\mu}\left[\mu R + c\right].$$

Παρατήρηση : Προκύπτουν δύο σταθερές.

Αν θεωρήσω και τη λύση που βρήκα στο x=1 έχω συνολικά τρεις σταθερές και μόνο δύο συνοριακές συνθήκες. Θα χρειαστώ λοιπόν και μια παραπάνω συνοριακή σύνδεσης.

Η συνθήκη σύνδεσης δίνεται : $\lim_{x\to+\infty} Y_0(x) = \lim_{x\to 0} y_0(x)$

Ικανοποιώ τις συνθήκες : $Y_0(0) = 0 \Rightarrow C_3 + \frac{C_2}{2} = 0$

$\lim_{x\to\infty} Y(x) = \lim_{x\to 0} y(x) \Rightarrow \frac{C_2}{2} = e$

$(y(x) = e^{1-x})$.

$$\begin{cases} C_2 = +2e \\ C_3 = -e \end{cases}$$

Τελικά : το $y_0(x) = e^{1-x}$

$$Y_0(X) = -e^{-2X+1} + e. \qquad X = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$= -e^{-2x/\varepsilon+1} + e.$$

Συνδιάζω τις λύσεις στο οριακό στρώμα ώστε συνολικά :

$$y(x) = Y_0(x) + y_0(x) - \lim_{x\to 0} y_0$$

δηλ : $$y(x) \cong e^{-2x/\varepsilon+1} + e + e^{1-x} - e.$$

Ικανοποιώ τις συνοριακές συνθήκες

$y(0) = -e + e + e - e = 0$ ✓

$y(1) = -e^{-2/\varepsilon+1} + e + 1 - e = 1$ ✓

καθώς : $\varepsilon \to 0$

Εξισώσεις με μεγάλη παράμετρο :

Θεωρούμε εξισώσεις της μορφής : $y'' + p(x,\lambda)y' + q(x,\lambda)y = 0$

όπου $\lambda >> 1$ μια μεγάλη παράμετρος .

Γενικότερα : Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού γράφονται στη μορφή : $y'' + q(x,\lambda)y = 0$ (Liouville)

Αν θεωρήσω την εξίσωση $y'' + p(\lambda)y' + q(x\lambda)y = 0$

Θέτω : $\boxed{y = e^{-1/2\int p\,dx}u}$ (Wronskian ορίζουσα)

$$y' = -\frac{1}{2}p\,e^{-1/2\int p\,dx}u + e^{-1/2\int p\,du}\cdot u'$$

$$= \left(u' - \frac{1}{2}pu\right)e^{-1/2\int p}dx$$

και $$y'' = \left(u'' - \frac{1}{2}p'u - \frac{1}{2}pu'\right)e^{-1/2\int p\,dx} + \left(u' - \frac{1}{2}pu\right)\left(-\frac{1}{2}p\right)e^{-1/2\int p\,dx}$$

Αντικαθιστώ:

$$y'' + Py' + qy = u'' - \frac{1}{2}P'u - \frac{1}{2}Pu' - 1/2\, Pu' + \frac{1}{4}P^2u + Pu' - \frac{1}{2}Pu + qu.$$

$$= u'' + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2 + q\right)}_{Q(x)} u = 0$$

καλύτερη μορφή.

Ειδικότερα θεωρούμε την εξίσωση:

$$y'' + [\lambda^2 q_1(x) + q_2(x)]\, y = 0 \quad , \lambda \gg 1$$

Η προσέγγιση WKB (Wentzel, Kraumer, Brillon)

Η πρώτη μου σκέψη είναι να θέσουμε $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon \ll 1$.

και αντικαθιστώ στην εξίσωση:

$$y'' + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} q_1 + q_2\right) y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon^2 y'' + q_1 y + \varepsilon^2 q_2 y = 0$$

Εφαρμόζω μέθοδο διαταραχών: $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$

και σε τάξη $O(1)$ βρίσκω: $q_1 y_0 = 0 \Longrightarrow y_0 \equiv 0$ (Δεν δίνει πληροφορία)

Άρα η μέθοδος αποτυγχάνει.

Η βασική ιδέα της μεθόδου WKB είναι να θεωρήσουμε καταρχάς την συνάρτηση $\boxed{q_1 = \text{σταθερή} \text{ και } q_2 = 0}$

Τότε: $y'' + \lambda^2 q_1 y = 0.$

Η λύση της εξίσωσης είναι:

$$\begin{cases} y = c_1 e^{i\lambda\sqrt{q_1}\cdot x} + c_2 e^{-i\lambda\sqrt{q_1}x} & , q_1 > 0 \\ y = c_1 e^{\lambda\sqrt{-q_1}x} + c_2 \cdot e^{\lambda\sqrt{-q_1}x} & , q_1 < 0 \end{cases}$$

Και στις δύο περιπτώσεις φαίνεται να είναι η λύση μια συνάρτηση της μορφής: $\boxed{y = e^{\lambda G(x,\lambda)}} \to y'' + [\lambda^2 q_1 + q_2] y = 0$

Αντικαθ. στην εξίσωση αυτή τη γενική μορφή

$$y = e^{\lambda G(\lambda, x)}$$

$$y' = \lambda G' e^{\lambda G}$$

$$y'' = \lambda G'' e^{\lambda G} + (\lambda G')^2 e^{\lambda G}$$

$$= \left[\lambda G'' + (\lambda G)^2\right] e^{\lambda G}$$

Άρα: $y'' + [\lambda^2 q_1 + q_2]\, y = 0 \Rightarrow \lambda G'' + \lambda^2 G^2 + \lambda^2 q_1 + q_2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda} G'' + G^2 + q_1 + \frac{1}{\lambda^2} q_2 = 0}$$

Παρατήρηση:

Η εξίσωση που προκύπτει είναι μη γραμμική 2ου βαθμού και πλέον μπορώ να θέσω $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$, $\varepsilon \ll 1$. Για την εξίσωση που προέκυψε μπορώ να χρησιμοποιήσω τη μέθοδο διαταραχών:

Θέτουμε: $G = G_0 + \varepsilon G_1 + o(\varepsilon^2)$

$$\varepsilon G'' + G^2 + q_1 + \varepsilon^2 q_2 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon(G_0'' + \varepsilon G_1'') + (G_0^2 + 2\varepsilon G_0 G_1 + \varepsilon^2 G_1^2) + q_1 + \varepsilon^2 q_2 = 0$$

Διαχωρίζω τις τάξεις:

$o(1)$: $(G_0')^2 + q_1 = 0$

$o(\varepsilon)$: $G_0'' + 2 G_0' G_1' = 0 \Rightarrow G_1' = \frac{-G_0''}{2G_0'}$

$$\Rightarrow G_1' = -\frac{1}{2}(\ln G_0')' \Rightarrow \boxed{G_1 = -\frac{1}{2}\ln G_0'}$$

Άρα λύνω την εξίσωση για το G_0:

$(G_0')^2 + q_1 = 0$ (Επιτρέπω και $q_1 > 0$)

$$\Rightarrow (G_0')^2 = -q_1 \Rightarrow G_0' = \begin{cases} \pm i\sqrt{q_1}, & q_1>0 \\ \pm\sqrt{q_1}, & q_1<0 \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad G_0 = \begin{cases} \pm i\int\sqrt{q_1}\,dx, & q_1>0 \\ \pm\int\sqrt{-q_1}\,dx, & q_1<0 \end{cases}$$

Βρίσκουμε και στις δύο περιπτώσεις δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις όπως και το περιμέναμε (πρόβλημα 2ας τάξης).

Τελικά ως τάξη $o(\lambda)$:

$$\begin{cases} G = \pm i\int\sqrt{q_1}\,dx - \frac{1}{\lambda}\left[\ln\sqrt{\pm i} + \ln\sqrt[4]{q_1}\right], & q_1>0. \\ G = \pm\int\sqrt{-q_1}\,dx - \frac{1}{\lambda}\left[\ln\sqrt{\pm 1} + \ln\sqrt[4]{-q_1}\right], & q_1<0 \end{cases}$$

$\ln\sqrt{i}$ ← πρωτεύουσα τιμή: κάθε μιγαδικός γράφεται: $z = x+iy \Rightarrow z = re^{i\theta}$

όπου $r^2 = x^2+y^2$

$\tan\theta = y/x$

Άρα:

$$i = e^{i\pi/2}$$

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} \Rightarrow \ln e^{i\pi/4} = i\pi/4$$

$$i^i = \left(e^{i\pi/2}\right)^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}$$

Η Γενική Μεθοδολογία της Μεθόδου WKB:

Έστω η εξίσωση: $y'' + \lambda^2 u(x) y = 0$, $\lambda \gg 1$

Αναζητώ λύση της μορφής:

$$y = e^{\lambda\phi}\left[z_0(x) + \frac{1}{\lambda}z_1(x) + \dots\right].$$

Αντικαθ. στην εξίσωση και σε διάφορες τάξεις του λ.

Βρίσκω :

$$\underline{O(\lambda^2)} \Rightarrow (\phi')^2 = -u(x)$$

$$\underline{O(\lambda)} \; : \; 2\phi' z_0' + \phi'' z_0 = 0$$

Δηλαδή :

$$\phi_\pm(x) = \pm i \sqrt{u}\, dx$$

$$z_0 \pm (x) = \frac{C_\pm}{\sqrt[4]{u(x)}}$$

Τελικά :

$$y \approx \frac{1}{u^{1/4}} \left[C_+ \cdot e^{i\lambda\int\sqrt{u}\,dx} + C_- \cdot e^{-i\lambda\int\sqrt{u}\,dx} \right] , \quad \lambda >> 1.$$

19/5/2016

$u'' + u + \varepsilon u^3 = 0$

$u(0) = x_0 = 1$

$u'(0) = V_0 = 0.$

(a) Αναλυτικά.

(b) Αριθμητικά.

Εντολή λύσης: ?DSolve (για παραδείγματα της εντολής).

$$\begin{cases} y'' + y = 0. \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

DSolve[{y''[x] + y[x] == 0 , y[0] == 1 , y'[0] == 0} , y[x], x].

→ Με την εντολή αυτή δεν την λύνει.

Αν θέσω αρχικές συνθήκες βγάζει κάποιες πληροφορίες.

όμως υπάρχει i οπότε δεν είναι αξιόπιστο το αποτέλεσμα.

Απλοποιώ: πολλαπλασιάζω με u' και ολοκληρώνω.

$$\frac{(u')^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \varepsilon \frac{u^4}{4} = c.$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 2(u')^2 + 2u^2 + \varepsilon u^4 = c \\ 2v_0^2 + 2x_0^2 + \varepsilon x_0^4 = c. \end{array}}$$

(Βρίσκω c από αρχικές συν)

δύσκολα το λύνω συμβολικά.

Αριθμητικά: ?NDSolve.

S = NDSolve[{ ...., ... }, y, {x, 0, 30}]

στο διάστημα αυτό λύνει την διαφορική εξίσωση.

- Λύνω την $y''+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$. με την NDSolve[].

Επόμενο βήμα Plot Evaluate[y(x) /.s], {x,0,30}, PlotRange->All].

↳

? Show.

{Cos[x]}

βλέπω πως πέφτει η cosx πάνω στην γραφική.

<u>Αριθμητικά για το πρόβλημα:</u> $\boxed{\varepsilon=0,1}$

1) s= NDSolve .....

plot [{Evaluate[....u[x]/.s, Cosx]} ...

όχι καλό αποτέλεσμα

<u>Θ. Διαταραχών:</u>

u[x_] = uo[x] + u1[x] e + u2[x] e^2.

eq = u''[x] + u[x] + e u[x]^3.

Collect [eq, e].

eqo = uo''[x] + uo[x].

eq1 = παρένθεση του συντελεστή e. (μόνο uo και u1)

eq2 = ———— // ———— e^2.

πρέπει να λύσω eqo με αρχικές τις $\begin{cases} u(0)=1 \\ u'(0)=0. \end{cases}$

eq1 με μηδενικές αρχικές.

$u(0)[x] \to Cos[x]s$ $\boxed{Για\ \varepsilon=0.1}$

⇒ DSolve [{ eq0 ==0, αρχικές . . .
→ u0[x_] = . . .
DSolve [{ eq1 ==0, . . .
→ u1[x_] = . . . (ότι βρήκαμε)
DSolve [{ eq2 ==0, . . .
u2[x_] = . . .

} όπως γνωρίζω.

Βρήκα φυσιολογ. τιμές για τα $u_1(x)$, $u_2(x)$.

Συγκρίνω αριθμητική λύση με προσεγγιστική.

Λύνω αριθμητικά το πρόβλημα με NDSolve. και συγκρίνω με u[x_].

για ε=0.1

s= NDSolve [. . . .] κλπ.

Plot [{Evaluate [y[x] /. s], u [~~X~~x] }, {x, 0, 10}, PlotRange→All].

Μετά ~~[illegible]~~ Πολλαπλές κλίμακες αφού η προσέγγιση χαλάει για μεγάλα x . πχ. 50.

Για χαμηλά x έχω περιγράψει την λύση πολύ καλά.

▶ Λύνω την :

$$\varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0$$
$$y(0) = 0$$
$$y(1) = 1.$$

Γραμμική 2ου βαθμού με σταθερές

Άρα DSolve [. . . .

yreal [e_, x_] = ...

Plot [yreal[0.1, x], {x, 0, 1}] που βγάζει γραφική της λύσης

Θέλω να προσεγγ. την λύση με ποικίλ. συναρτήσεις.
(με μέθοδο οριακού στρώματος).

Λύση αριστερά

$$\bar{X} = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Αντικαθ.:

$$\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2} Y'' + \frac{2}{\varepsilon} Y' + 2Y = 0.$$

απλοποιήσεις:

$$Y'' + 2Y' + 2\varepsilon Y = 0.$$

$$\boxed{Y_0'' + 2Y_0' = 0.}$$

$$Y(0) = 0.$$

και άλλη μια συνθήκη:

Λύνω αυτή χωρίς συνθήκη:

DSolve[Yo''[x]+2Yo'[x]==0

$\left(\Longrightarrow \quad Yo[x] \to -\frac{1}{2} e^{-2x} C[1] + C[2]\}\right).$

θα δηλώσω ότι:

$Yo[\varepsilon, x\_] = c_1 e^{-2x/\varepsilon} + c_2.$ (βρίσκω c_1, c_2 με το χέρι)

$c_1 = -e$

$c_2 = e.$

Πηγαίνω στην plot[{ ..., Yo[0,1, x], ...]

και συγκρίνω με τις άλλες λύσεις

Λύση δεξιά

$$2y_0' + 2y_0 = 0.$$

$$y_0(1) = 1$$

DSolve.

Μετά

Plot με yreal.

plot[{yreal[0.1, x], e^{1-x}}, {x, 0, 1}, PlotRange→All]

e = Exp[1]

Άρα:

$$\underbrace{Y_0[\varepsilon\_, x\_]}_{\text{Η αριστερή.}} = -e\cdot e^{-9x/\varepsilon} + e \quad \text{και} \quad \underbrace{y_0(x)}_{\text{Η δεξιά}} = e^{1-x}.$$

Η συνολική: (πρέπει να τις συνενώσω)

$$y\,\mathrm{final}[\varepsilon\_, x\_] = Y_0[\varepsilon, x] + y_0[x] - \underbrace{\lim_{x\to 0} y_0[x]}_{e}.$$

Την προσθέτω και αυτή στο γράφημα για $\varepsilon=0.1$ ή και μικρότερο.